PENURUNAN RUMUS *BLACK-SCHOLES* UNTUK PENENTUAN HARGA OPSI *PUT* EROPA

Andi Fajeriani Wyrasti
Jurusan Matematika dan Statistika FMIPA UNIPA
Jurusan Matematika dan Statistika, Universitas Negeri Papua
e-mail: ichan80math@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan harga opsi put Eropa yang pantas saat ini. Penentuan ini dilakukan dengan jalan menurunkan sebuah persamaan diferensial parsial yang dikenal dengan nama Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes $\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2P}{\partial S^2}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP=0$. *Opsi put Eropa merupakan salah satu jenis opsi vanila yang sangat digemari oleh para investor. Mengingat popularitas opsi put Eropa ini, mengakibatkan penentuan harga yang wajar bagi opsi put Eropa ini penting untuk dilakukan agar tidak terjadi spekulasi di kalangan para pecinta opsi. Adapun variabel-variabel yang digunakan dalam penentuan harga opsi put Eropa ini adalah exercise price* (K), *interest rate* (r), *expiration date* (T), *stock price* (S), *current time* (t) *dan volatility* (σ). *Berdasarkan proses penurunan persamaan diferensial parsial yang telah dilakukan, diperoleh hasil bahwa harga opsi put Eropa yang pantas saat ini adalah* $P_E=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0N(-d_1)$.
Kata Kunci* : *PDP Black-Scholes, Harga Opsi, Opsi Put Eropa

Abstract

The aim of this research is to find the suitable option value of The European Put Option today. The suitable value can determined by using the partial differential equation, that we called the Black-Scholes PDE $\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2P}{\partial S^2}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP=0$. *European put option is the one type of vanilla option that very popular to the investor. Because of its popularity, knowing the suitable value for this Europen put option became very important in order to avoid the speculation among the lovers of the option. The variables used in determining the price of the European put option is exercise price* (K), *interest rate* (r), *expiration date* (T), *stock price* (S), *current time* (t) *and volatility* (σ). *Based on the process that has been done, the result showed that the suitable option value of The European Put Option today is* $P_E=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0N(-d_1)$.
Kata Kunci* : *Black-Scholes PDE, Option Value, European Put Optin

1.PENDAHULUAN

Selama lebih dari 20 sampai 25 tahun terakhir, penggunaan derivatif telah menjadi semakin populer disaat banyak perusahaan mulai mencari cara-cara baru yang lebih baik untuk mengelola resiko keuangan. Dengan derivatif, resiko-resiko rumit yang menyertai suatu instrumen dapat dikelola secara terpisah dan efisien serta mampu menghemat biaya dan meningkatkan return yang signifikan dengan memperluas cakupan alternatif biaya dan investasi. Salah satu bentuk derivatif adalah option (opsi).

Opsi adalah suatu instrumen keuangan yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli atau menjual suatu aset dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu. Opsi memberikan perlindungan yang diinginkan pemiliknya/pembelinya dan memungkinkan terjadinya spekulasi untuk memperoleh gain (keuntungan) dari perubahan harga yang terjadi pada underlying asset tetapi tidak mengalami loss (kerugian) yang akan muncul akibat transaksi option tersebut. Jadi, pemilik opsi dapat memilih untuk tidak mengexercise opsi miliknya dan membiarkan hingga maturity time (jatuh tempo).

Sebuah opsi memiliki salah satu dari dua atribut utama, yaitu *call* (membeli) dan *put* (menjual). Secara umum, ada dua jenis opsi, yaitu *Vanilla Option* (Opsi Vanila) dan *Exotic Option* (Opsi Eksotik). Diantara kedua jenis opsi ini, opsi Vanila merupakan salah satu jenis opsi standar yang lebih sering diperdagangkan. Apabila ditinjau dari waktu untuk meng*exercise*nya, Opsi Vanila terdiri atas *European Option* (opsi Eropa) dan *American Option* (opsi Amerika). Namun yang menjadi permasalahan adalah berapa harga yang wajar untuk sebuah opsi. Menentukan harga yang wajar untuk sebuah opsi memerlukan model penentuan yang rumit. Model yang paling terkenal dan sering digunakan adalah model *Black-Scholes*. Model ini berasal dari sebuah persamaan diferensial parsial yang dikenal dengan nama Persamaan Diferensial Parsial *Black-Scholes* (PDP *Black-Scholes*). Persamaan diferensial parsial *Black-Scholes* tersebut adalah $\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP=0$. Mengingat pentingnya mengetahui harga opsi *put* Eropa saat ini, sehingga pada tulisan ini akan dibahas mengenai penurunan persamaan diferensial tersebut untuk opsi *put* Eropa.

2. PENURUNAN PDP *BLACK-SCHOLES* UNTUK OPSI PUT EROPA

Pada tulisan ini, variabel-variabel yang digunakan dalam penentuan harga opsi *put* Eropa adalah sebagai berikut :

r = *interest rate*
σ = *volatility*
S = *Stock price* / *Price of asset*
K = *Exercise price* / *Strike price*
T = *Time to maturity* / *Expiration date*
t = *current time*, $t < T$
$P(S,t)$ = Harga opsi *put* pada saat t dan *stock price S*

Persamaan Diferensial Parsial *Black-Scholes* untuk opsi *put* yang akan digunakan adalah

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+rS\frac{\partial P}{\partial S}-rP=0 \quad (1)$$

Untuk menurunkan PDP *Black-Scholes* ini, terlebih dahulu dimisalkan

$$x=ln\left(\frac{S}{K}\right)$$

Karena $x=ln\left(\frac{S}{K}\right)$, mengakibatkan $0 < S < \infty$ berkorespondensi dengan $-\infty < x < \infty$.

Selanjutnya misalkan

$$\frac{\partial P}{\partial S}=\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} \quad . \quad (2)$$

Bila $x=ln\left(\frac{S}{K}\right)$ diferensialkan secara parsial terhadap S, diperoleh

$$\frac{\partial x}{\partial S}=\frac{1}{S}$$

Karena $\frac{\partial x}{\partial S}=\frac{1}{S}$, sehingga Persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial P}{\partial S}=\frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{S} \quad (2a)$$

Dan bila diturunkan lagi secara parsial terhadap S diperoleh

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{1}{S^2}-\frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{S^2} \quad (3)$$

Selanjutnya substitusi (3) dan (2a) ke (1) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{\partial^2 P}{S^2\partial x^2}-\frac{\partial P}{S^2\partial x}\right)+rS\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{S}\right)-rP=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial P}{\partial x}-rP=0 \quad (4)$$

Misalkan solusi PDP (4) adalah

$$P(x,t)=Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}u(x,t) \quad (5)$$

Untuk suatu variabel tak bebas $u=u(x,t)$.

Diferensialkan (5) terhadap t diperoleh:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}\left(-\alpha u+\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad (6)$$

Diferensialkan (5) terhadap x diperoleh:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (7)$$

Dan diferensialkan (7) terhadap x diperoleh:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}\left(\beta^2 u+2\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad (8)$$

Selanjutnya, substitusi (5), (6), (7), dan (8) ke (4), diperoleh

$$Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}\left(-\alpha u+\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}\left(\beta^2 u+2\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)-r\left(Ke^{\alpha(T-t)+\beta x}u(x,t)\right)=0$$

Atau

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\beta^2 u+2\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-(\alpha+r)u=0 \quad (9)$$

dengan

$$u(x,t)=e^{-\beta x}max\{1-e^x,0\}$$

Selanjutnya, koefisien $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan u akan dieliminasi dengan memilih

$$\sigma^2\beta+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)=0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta+\beta\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-r-\alpha=0 \quad (11)$$

Sehingga (9) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (12)$$

Dengan

$$u(x,t)=e^{-\beta x}max\{1-e^x,0\}=\begin{cases}e^{-\beta x}-e^{(1-\beta)x}, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

yang selanjutnya dikenal sebagai masalah nilai awal $u(x,t)$.

Selanjutnya, masalah nilai awal tersebut akan ditransformasi ke bentuk (x,τ) dengan memilih

$$\tau=\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \quad (13)$$

Diferensialkan (13) terhadap t, diperoleh

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \quad (14)$$

Masalah nilai awal (12) dalam (x,τ) dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

Substitusi (14) ke (15) diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Atau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial\tau} \quad (16)$$

Dengan

$$u(x,0) = \begin{cases} e^{-\beta x} - e^{(1-\beta)x} & , x \le 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}$$

Solusi untuk masalah nilai awal (16) adalah

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}-\beta z\right)}dz - \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}-(1-\beta)z\right)}dz$$

Integral tersebut dapat dikonversikan ke integral kepadatan peluang dengan melengkapkan kuadrat.

•Integral suku pertama,

$$-\frac{(x-z)^2}{4\tau} - \beta z = -\frac{x^2-2xz+z^2-4\tau\beta z}{4\tau} = -\frac{(z+(2\tau\beta-x))^2}{4\tau} + \beta^2\tau - \beta x$$

Misalkan $\frac{z+2\tau\beta-x}{\sqrt{4\tau}} = \frac{y}{\sqrt{2}}$, diperoleh

$$e^{\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}-\beta z\right)} = e^{-\frac{y^2}{2}+\beta^2\tau-\beta x}$$

$$dz = \sqrt{2\tau}\,dy,$$

$$z = 0,$$

dan

$$y = \frac{2\beta\tau-x}{\sqrt{2\tau}}$$

Sehingga suku pertama dapat dirubah menjadi

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}-\beta z\right)}dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\frac{2\beta\tau-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{\left(-\frac{y^2}{2}+\beta^2\tau-\beta x\right)}\sqrt{2\tau}dy = e^{(\beta^2\tau-\beta x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{2\beta\tau-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)}\sqrt{2\tau}dy \quad (17)$$

Dari (11) diperoleh

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta = r + \alpha - \beta\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad (18)$$

Substitusi (10) ke (18) diperoleh

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta = r + \alpha - \beta(-\sigma^2\beta)$$

Atau

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta = -r - \alpha \quad (19)$$

Selanjutnya, bentuk $(\beta^2\tau - \beta x)$ dari $e^{(\beta^2\tau-\beta x)}$ akan diubah dengan menggunakan (13), diperoleh

$$\beta^2\tau - \beta x = \beta^2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right) - \beta x$$

Substitusi (19), diperoleh

$$\beta^2\tau - \beta x = (-r-\alpha)(T-t) - \beta x \quad (20)$$

dan pilih

$$-d_2 = \frac{2\beta\tau-x}{\sqrt{2\tau}} = \frac{2\beta\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)-x}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}} = \frac{x+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (21)$$

Sehingga persamaan (17) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}-\beta z\right)}dz = e^{(-r-\alpha)(T-t)-\beta x}N(-d_2) = e^{-r(T-t)}e^{-\alpha(T-t)}e^{-\beta x}N(-d_2) \quad (22)$$

•Integral Suku Kedua

Untuk memperoleh hasil pengintegralan suku kedua, β diganti dengan $\beta - 1$. Sehingga, serupa dengan (20), diperoleh

$$(\beta-1)^2\tau - (\beta-1)x = (\beta^2-2\beta+1)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - (\beta-1)x = \left(\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 - \sigma^2\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) - (\beta-1)x \quad (23)$$

Dari (19) diketahui $\frac{1}{2}\sigma^2\beta = -r-\alpha$, dan dari (10) diketahui $-\sigma^2\beta = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$, sehingga bila disubstitusi ke (23) akan diperoleh

$$(\beta-1)^2\tau - (\beta-1)x = \left(-r-\alpha+r-\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) - (\beta-1)x = (-r-\alpha)(T-t) - (\beta-1)x$$

dan untuk (21), diperoleh

$$-d_1 = \frac{2(\beta-1)\tau-x}{\sqrt{2\tau}} = \frac{(\beta-1)\left(\sigma^2(T-t)\right)-x}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{(\beta\sigma^2-\sigma^2)(T-t)-x}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (24)$$

Dari (10), $\sigma^2\beta = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$, sehingga (24) dapat dinyatakan sebagai

$$-d_1 = \frac{\left(-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\sigma^2\right)(T-t)-x}{\sigma\sqrt{T-t}} = -\frac{x+\left(\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\sigma^2\right)(T-t)-x}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Jadi, diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}-(1-\beta)z\right)}dz = e^{(-r-\alpha)(T-t)-\beta x}N(-d_2) = e^{-\alpha(T-t)}e^{-\beta x}e^{x}N(-d_1)$$

dengan $N(d)$ = fungsi distribusi normal kumulatif. Sehingga dengan menggabungkan (5), (22), dan (24) diperoleh nilai *put* untuk opsi Eropa, yaitu

$$P(x,t) = Ke^{-\alpha(T-t)+\beta x} \left(e^{-r(T-t)}e^{-\alpha(T-t)}e^{-\beta x}N(-d_2) - e^{-\alpha(T-t)}e^{-\beta x}e^{x}N(-d_1)\right)$$

Jadi,

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}\big(N(-d_2) - SN(-d_1)\big)$$
$$= Ke^{-r(T-t)}\big(N(-d_2) - Ke^{x}N(-d_1)\big)$$

Sehingga, harga saat ini dari opsi *put* Eropa adalah

$$P_E = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

3. PENUTUP

Dengan menggunakan PDP *Black-Scholes*, $\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$

dapat diperoleh harga opsi *put* Eropa adalah

$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}\big(N(-d_2) - Ke^{x}N(-d_1)\big)$ Sehingga harga saat ini dari opsi *put* Eropa adalah

$P_E = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chain J W, Reynolds A M, *Ordinary and Partial Differential Equations : An Introduction to Dynamical Systems*, Virginia Commonwealth University, 2010.

[2] Fries C P., *Mathematical Finance : Theory, Moodelling, Implemetation*, Frankfurt am Main, 2007.

[3] Higham D J., *An Introduction to Financial Option Valuation*, USA, Cambridge University Press, 2005.

[4] Kwok Y K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore, Springer-Verlag, 1998.

[5] LeVeque R J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, Philadelphia, SIAM, 2007.

[6] Malliavin P, Thalmaier A., *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*, New York, Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[7] Reynolds B., *Memahami Derivatif*, Batam Centre, Interaksara, 2000.

[8] Ross S M., *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, USA, Cambridge University Press, 2000.

[9] Seydel R., *Tools for Computational Finance*, Berlin, Springer-Verlag, 2002.

[10] Strauss W A., *Partial Differential Equations, An Introduction*, USA, John Wiley & Sons, 1992.

[11] Wilmot P S, Howison J, Dewynne., *The Mathematics of Financial Derivatives, A Student Introduction*, USA, Cambridge University Press, 1995.